



مسائل ریاضی ۲ (شماره ۴)

۱. مشخص کنید که میدان برداری داده شده پایستار است یا خیر. اگر پایستار است، تابعی مانند f بیابید که

$$F = \nabla f$$

$$F(x, y, z) = y^2 z^2 i + 2xyzj + 3xy^2 z^2 k \quad (\text{الف})$$

$$F(x, y, z) = e^z i + j + xe^z k \quad (\text{ب})$$

$$F(x, y, z) = y \cos xy i + x \cos xy j + -\sin zk \quad (\text{ج})$$

۲. آیا میدان برداری مانند G روی \mathbb{R}^3 وجود دارد که $\text{curl} G = (x \sin y, \cos y, z - xy)$ توضیح دهید.

۳. نشان دهید که هر میدان برداری به شکل

$$F(x, y, z) = f(x)i + g(y)j + h(z)k$$

که در اینجا f, g, h تابعهایی مشتق پذیرند، بی چرخش است.

۴. با فرض اینکه مشتقهای جزئی مناسب هر مورد وجود دارند و پیوسته اند اتحاد مورد نظر را ثابت کنید. اگر F و

G میدانهای برداری باشند، آن وقت $fF, F \cdot G, fF$ و $F \times G$ به شکل

$$(fF)(x, y, z) = f(x, y, z)F(x, y, z)$$

$$(f \cdot G)(x, y, z) = F(x, y, z) \cdot G(x, y, z)$$

$$(F \times G)(x, y, z) = F(x, y, z) \times G(x, y, z)$$

تعریف می شوند

$$\text{div}(F + G) = \text{div}F + \text{div}G \quad (\text{الف})$$

$$\text{curl}(F + G) = \text{curl}F + \text{curl}G \quad (\text{ب})$$

$$\text{div}(fF) = f \text{div}F + F \cdot \nabla f \quad (\text{ج})$$

$$\text{curl}(fF) = f \text{curl}F + (\nabla f) \times F \quad (\text{د})$$

$$\text{div}(F \times G) = G \cdot \text{curl}F - F \cdot \text{curl}G \quad (\text{ه})$$

$$\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0 \quad (\text{و})$$

$$\text{curl}(\text{curl}F) = \text{grad}(\text{div}F) - \nabla^2 F \quad (\text{ز})$$

۵. فرض کنید $r = xi + yj + zk$ و $\alpha = |r|$. هریک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$\nabla \cdot r = 3 \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \cdot (\alpha r) = 4\alpha \quad (\text{ب})$$

$$\nabla^2 r^2 = 12\alpha \quad (\text{ج})$$

$$\nabla \alpha = \frac{r}{\alpha} \quad (\text{د})$$

$$\nabla \times r = 0 \quad (\text{ه})$$

$$\nabla \left(\frac{1}{\alpha} \right) = \frac{-r}{\alpha^3} \quad (\text{و})$$

$$\nabla \ln \alpha = \frac{r}{\alpha^2} \quad (\text{ز})$$

۶. معادله‌های ماکسول که میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی H را که در ناحیه‌ای که هیچ بار الکتریکی و جریان وجود ندارد با زمان تغییر می‌کنند به هم مرتبط می‌دهند می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

$$\text{div}H = 0, \quad \text{div}E = 0$$

$$\text{curl}H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \text{curl}E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$$

که در اینجا c سرعت نور است. با استفاده از این معادله‌ها حکمهای زیر را ثابت کنید.

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times (\nabla \times H) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (\text{ب})$$

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (\text{ج})$$

$$\nabla^2 H = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (\text{د})$$