دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مسایل ریاضی ۲ (شماره‌ی ۲)

۱. در پیوستگی تابع زیر در $\mathbb{R}^{۲}$ بحث کنید. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ \frac{۱}{۲} & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$

۲. نشان دهید که تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^{۲}}{x^{۲}+y^{۴}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ روی هر خط گذرنده از مبداء دارای حد صفر در نقطه $(۰,۰)$ است، ولی این تابع در نقطه $(۰,۰)$ حد ندارد.

۳. در پیوستگی تابع زیر در مبداء بحث کنید. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^{۲}+y^{۲}}+y\sin\frac{۱}{x} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$

۴. در پیوستگی تابع زیر در مبداء بحث کنید. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{۲}y^{۲}}{x^{۴}+۲y^{۴}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$

۵. فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$

i) مطلوب است محاسبه‌ی $f'(۰,۰)$.

ii) با استفاده از تعریف مشتق سویی، مقدار $D_uf(۰,۰)$ را که در آن $U=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱,۱)$ را محاسبه کنید.

۶. پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ را در مبداء بررسی کرده و سپس مشتق جهتی آن را در نقطه‌ی $p(۱,۲)$ و در امتداد بر تابع برداری $R(t)=\sin ti+\cos tj$ به ازای $t=\frac{\pi}{۳}$ بیابید.

۷. تابع با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزئی مرتبه اول f را در $(۰,۰)$ تعیین کنید.

ج) نشان دهید f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

۸. در پیوستگی تابع زیر بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2-y^2} & x^2+y^2\leq 4\\ 0 & e.w\end{cases}$$

۹. پیوستگی تابع $f(x,y)$ را در مبداء مختصات بررسی کرده سپس مشتق جهتی تابع را در نقطه‌ی $(1,1)$ در امتداد بردار مماس بر منحنی $x=\sqrt{2}\cos t,\quad y=\sqrt{2}\sin t$ در $t=\frac{\pi}{4}$ بیابید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^3+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

۱۰. نشان دهید که تابع زیر در مبداء مختصات پیوسته است و مشتقات جزئی آن نیز در مبداء وجو دارند.

$$f(x,y)=\begin{cases}x & |x|\leq|y|\\ -x & |x|>|y|\end{cases}$$

۱۱. مطلوب است $f_{xy}(0,0)$ و $f_{yx}(0,0)$ وقتی که

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

۱۲. فرض کنید $u=x^2-y^2$ و $v=xy$. برای تابع دلخواه $z=f(x,y)$ که خارج از مبداء تعریف شده است عبارت $z_{xy}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ را بر حسب مشتقات z نسبت به متغییرهای u و v بیابید.

۱۳. معادله خط مماس و صحفه قائم بر منحنی مقابل را در نقطه‌ی $(1,-1,1)$ بنویسید:
$C: 3x^2y+y^2z=-2\ ,\ 2xy-x^2y=3$

۱۴. در صورتیکه تابه y از x با اشتفاده از رابطه‌ی $\ln(\sqrt{x^2+y^2})=\arctan(\dfrac{y}{x})$ بیان شده باشد مقادیر $\dfrac{dy}{dx}$ و $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ را محاسبه کنید.

۱۵. اگر $u=x+y$ و $v=\dfrac{y}{x}$ و $w=\dfrac{z}{x}$. تابع $z(x,y)$ را به $w(u,v)$ تبدیل نموده و معادله با مشتقات جزئی $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=0$ را بر حسب w و مشتقاتش بر حسب u و v بنویسید.

۱۶. فرض کنید $z=f(u,v)$ و $u=x^2-y^2$ و $v=2xy$. مجموع $z_{xx}+z_{yy}$ را بر حسب ضریبی از مجموع $z_{uu}+z_{vv}$ بدست آورید.(به صورت $(z_{uu}+z_{vv})\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]$).

۱۷. رابطه‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ را بر حسب متغییرهای جدید $u=x$ و $v=\frac{y}{x}$ بازنویسی کنید.

۱۸. نشان دهید که تابع $z=xf(\frac{y}{x})+g(\frac{y}{x})$ در معادله زیر صدق می‌کند.

$$x^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+۲xy\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}+y^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$$

۱۹. معادله لاپلاس $\nabla^۲ n=\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}$ را در مختصات استوانه‌ای بنویسید.

۲۰. مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=\ln(x^۲+y^۲+z^۲)$ را در جهت بردار مماس بر منحنی به معادله $r(t)=(t^۲+۱,۲t^۲,t^۳)$ در لحظه $t=۱$ بنویسید.

۲۱. فرض کنید z تابعی از x و y باشد و اگر $f(x^۳-y^۳,x^۲-z^۲)=۰$، آنگاه ثابت کنید:

$$y^۲z\frac{\partial z}{\partial x}+x^۲z\frac{\partial z}{\partial y}=xy^۲$$

۲۲. فرض کنید $u=f(x,y)$ تابعی با مشتقات دوم پیوسته باشد طوری که nای وجود داشته باشد که به ازای هر t، x و y داشته باشیم $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$. دراینصورت نشان دهید که

$$x^۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+۲xy\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}+y^۲\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=n(n-۱)f$$

۲۳. صفحه‌ی مماس بر سطح $x^۲-y^۲-۳z=۰$ طوری بیابید که از نقطه‌ی $(۰,۰,-۱)$ گذشته و موازی خط $\frac{x}{۲}=y=\frac{z}{۲}$ باشد.

۲۴. اگر $z=f(x,y)$ که در آن $x=s+t$ و $y=s-t$ است. نشان دهید:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^۲-\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^۲=\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$