دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مسایل ریاضی ۲ (شماره‌ی ۱)

۱. مختصات نقطه $A(x,y,z)$ در پایه استاندارد را چنان بیابید که مختصات نقطه A در پایه $S_۱ = \{(۱,۲,۱),(۰,۱,۲),(۳,۰,۰)\}$، $(۴,۲,۱)$ باشد.

۲. مختصات نقطه $A(۱,۲,۵)$ را در پایه $S_۲ = \{(۰۵,۲),(۴,۱,۳),(۱,۰,۰)\}$ بیابید.

۳. نشان دهید مجموعه $S_۳$ یک مجموعه متعامد است.

$$S_۳ = \{(۳,۰,۴),(-۴,۰,۳),(۰,۹,۰)\}$$

۴. ثابت کنید اگر مجموعه S یک مجموعه از عناصر متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند، آنگاه S یک مجموعه مستقل خطی است.

۵. نشان دهید $S_۶ = \{(۳,۰,۴),(-۱,۰,۷),(۲,۹,۱۱)\}$ یک مجموعه مستقل خطی است. سپس با استفاده از فرایند گرام—اشمیت پایه متعامد متناظر با آن را بیابید.

۶. فرض کنید A مجموعه چندجمله‌ای های حداکثر از درجه ۴ باشد. ضرب بین در چندجمله‌ای $P_۱,P_۲ \in A$ را با $\langle P_۱,P_۲\rangle = \int_{-۱}^{۱} P_۱(x)P_۲(x)\mathrm{d}x$ نمایش می‌دهیم نشان دهید چندجمله‌ای زیر پایه متعامد یکه برای A است.

$$A = \Big\{۱, x, \frac{۱}{۲}\big(۳x^۲-۱\big), \frac{۱}{۲}\big(۵x^۳-۳x\big), \frac{۱}{۸}\big(۳۵x^۴-۳۰x^۲+۳\big)\Big\}.$$

۷. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر آنها را در ماتریس زیر بیابید. سپس ماتریس قطری متشابه با آنها را در صورت وجود بیابید.

$$A_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad A_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \qquad A_۳ = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۳ & -۳ \\ -۱ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

۸. تعریف: ماتریس مربعی A را یک ماتریس مثبت معین می‌نامیم اگر به ازای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$، $x^TAx > 0$. ثابت کنید همه مقادیر ویژه A مثبت می‌باشند.

۹. رویه‌های زیر را با استفاده از تغییر متغیر مناسب استاندارد نمایید.

i) $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz + 4yz = 0$

ii) $xy = 2$

iii) $xy + y^2 = 3x + y$

iv) $x^2 - y^2 + 2z^2 + 2x + 4y - 8z = 0$.