



مسائل ریاضی ۲ (شماره‌ی ۲)

۱. طول قوس هریک از منحنی‌های زیر را بدست آورید.

$$r(t) = ti + \frac{1}{4}t^2k \quad 0 < t < 8 \quad (i)$$

$$r(t) = (\cos t, \sin t, 2) \quad 0 \leq t \leq 8\pi \quad (ii)$$

۲. کنج فرنه هریک از منحنی‌های زیر را بدست آورید.

$$r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, \sqrt{5}t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (i)$$

$$C: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = \sqrt{3}y \quad (ii)$$

۳. معادله خط مماس و صفحه مماس و صفحه قائم بر منحنی‌های زیر را در نقطه داده شده را بدست آورید.

$$r(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad X_0 = (-1, 0, \pi) \quad (i)$$

$$x + y + z = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad X_0 = (1, -2, 2) \quad (ii)$$

۴. ثابت کنید خط مماس بر $r(t) = (a \cos wt, a \sin wt, bt)$ همواره زاویه ثابت با صفحه xy می‌سازد.

۵. نشان دهید منحنی زیر مسطح است و انحنای ثابت دارد.

$$r(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3} \cos t) \quad -\pi \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

۶. مرکز انحنای بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را بیابید.

۷. ثابت کنید:

$$T' = kN \quad (i)$$

$$N' = -kT + \tau.B \quad (ii)$$

$$B' = -\tau.N \quad (\text{iii})$$

۸. شتاب مماس و قائم منحنی $r(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2)$ را در لحظه $t = \pi$ بیابید.

۹. فرمولهای k و τ را ثابت کنید

$$k = \frac{|V \times a|}{|V|^3} \quad (\text{i})$$

$$\tau = \frac{|r' \cdot (r'' \times r''')|}{|r \times a|^2} \quad (\text{ii})$$

۱۰. رویه‌ای بیابید که منحنی $(t \cos t, t \sin t, t)$ روی آن می‌گیرد.

۱۱. منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $z = x^2$ را بیابید.

۱۲. محل تقاطع منحنی $(\sin t, \cos t, t)$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ را بیابید.

۱۳. ثابت کنید

$$\frac{d}{dt}(f(t)r(t)) = f'(t)r(t) + f(t)r'(t)$$

که f تابع اسکالر و $r(t)$ تابع پارامتری در \mathbb{R}^3 است.

۱۴. فرض کنید یک منحنی در مختصات قطبی $r = f(\theta)$ داده شده است انحنا و بردار یک مماس و بردار یک قائم و بردار یک قائم دوم آن را بیابید.

۱۵. انحنا و یک منحنی $y = f(x)$ در صفحه مختصات را محاسبه کنید.

۱۶. دایره بوسان سهمی $y = x^2$ را در مبدا مختصات بیابید.

۱۷. دایره بوسان بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ را در نقاط $(2, 0)$ و $(0, 3)$ بیابید.

۱۸. عبارات داده شده را محاسبه کنید

$$\frac{d}{dt}(r_1(t) \cdot (r_2(t) \times r_3(t))) = ? \quad (\text{i})$$

$$\frac{d}{dt}(r_1(t) \times r_2(t)) = ? \quad (\text{ii})$$

۱۹. ثابت کنید اگر $r(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt}|r(t)| = \frac{1}{|r(t)|} r(t) \cdot r'(t).$$

۲۰. طول منحنی $r(t) = at^2i + btj + 3 \ln tk$ را $1 \leq t \leq T$ بر حسب انتگرال معین بیان کنید. اگر $b^2 = 4ac$ طول قوس $r(t)$ چقدر است.