۱۷. $f(x,y,z) = yz + xy$؛ $xy = ۱$، $y^۲ + z^۲ = ۱$

۱۸-۱۹ مقدارهای اکسترمم f روی ناحیهٔ مشخص‌شده با نامعادلهٔ داده‌شده را پیدا کنید.

۱۸. $f(x,y) = ۲x^۲ + ۳y^۲ - ۴x - ۵$، $x^۲ + y^۲ \leq ۱۶$

۱۹. $f(x,y) = e^{-xy}$، $x^۲ + ۴y^۲ \leq ۱$

۲۰. مسألهٔ ماکسیمم‌کردن تابع $f(x,y) = ۲x + ۳y$ با شرط $\sqrt{x} + \sqrt{y} = ۵$ را در نظر بگیرید.

الف) از روش ضریبهای لاگرانژ برای حل‌کردن این مسأله استفاده کنید.

ب) آیا $f(۲۵,۰)$ مقداری بزرگتر از مقدار قسمت (الف) است؟

ج) مسأله را با ترسیم معادلهٔ شرط داده‌شده و چند منحنی تراز f حل کنید.

د) توضیح دهید که چرا روش ضریبهای لاگرانژ برای حل‌کردن این مسأله کارایی ندارد.

ه) اهمیت $f(۹,۴)$ چیست؟

۲۱. مسألهٔ مینیم‌کردن تابع $f(x,y) = x$ روی منحنی

$$y^۲ + x^۴ - x^۳ = ۰$$

را در نظر بگیرید.

الف) از روش ضریبهای لاگرانژ برای حل‌کردن این مسأله استفاده کنید.

ب) نشان دهید که مقدار مینیمم برابر است با $f(۰,۰) = ۰$ اما شرط لاگرانژ $\nabla f(۰,۰) = \lambda \nabla g(۰,۰)$ به‌ازای هیچ مقداری از λ درست نیست.

ج) توضیح دهید که چرا در این مورد روش ضریبهای لاگرانژ کارایی ندارد.

CAS ۲۲. الف) اگر سیستم جبری کامپیوتری‌تان منحنیهای به‌طور ضمنی تعریف‌شده را می‌کشد، با استفاده از آن مقدارهای مینیمم و ماکسیمم $f(x,y) = x^۳ + y^۳ + ۳xy$ را با شرط $(x-۳)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹$ به‌روش ترسیمی تخمین بزنید.

ب) مسألهٔ قسمت (الف) را به کمک روش ضریبهای لاگرانژ حل کنید. با استفاده از سیستم جبری کامپیوتری‌تان معادله‌ها را به‌طور عددی حل کنید. پاسخهایتان را با پاسخهایتان در قسمت (الف) مقایسه کنید.

۲۳. تولید کل محصولی، P، به تعداد کارگران، L، و میزان سرمایه‌گذاری، K، بستگی دارد. در بخشهای ۱.۱۵ و ۳.۱۵ توضیح دادیم که مدل کاب-داگلاس، $P = bL^\alpha K^{۱-\alpha}$، چگونه از یک سری فرضهای اقتصادی به‌دست می‌آید، که در اینجا b و α عددهایی ثابت و مثبت‌اند و $\alpha < ۱$. اگر هزینهٔ هر نفر کارگر m و هزینهٔ هر واحد سرمایه‌گذاری n باشد، و بودجهٔ کل شرکت فقط p دلار باشد، آن‌وقت ماکسیمم‌کردن تولید P تحت شرط $mL + nK = p$ است. نشان دهید که ماکسیمم تولید وقتی پیش می‌آید که

$$L = \frac{\alpha p}{m}, \qquad K = \frac{(۱-\alpha)p}{n}$$

۲۴. با مراجعه به تمرین ۲۳، اکنون فرض می‌کنیم که تولید در سطح $bL^\alpha K^{۱-\alpha} = Q$ ثابت است، که در اینجا Q ثابت است. چه مقدارهایی از L و K تابع هزینه، $C(L,K) = mL + nK$، را مینیمم می‌کنند.

۲۵. با استفاده از روش ضریبهای لاگرانژ ثابت کنید مستطیل با مساحت ماکسیمم که محیطش مقدار مفروض p است مربع است.

۲۶. با استفاده از روش ضریبهای لاگرانژ ثابت کنید مثلث با مساحت ماکسیمم که محیطش مقدار مفروض p است متساوی‌الاضلاع است. راهنمایی: از دستور هرون برای مساحت استفاده کنید:

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

که در اینجا $s = \frac{p}{۲}$ و x، y و z طول ضلعها هستند.

۲۷-۳۹ با استفاده از روش ضریبهای لاگرانژ راه‌حلی دیگر برای تمرینهای مشخص‌شده از بخش ۷.۱۵ پیدا کنید.

۲۷. تمرین ۳۹ — ۲۸. تمرین ۴۰

۲۹. تمرین ۴۱ — ۳۰. تمرین ۴۲

۳۱. تمرین ۴۳ — ۳۲. تمرین ۴۴

۳۳. تمرین ۴۵ — ۳۴. تمرین ۴۶

۳۵. تمرین ۴۷ — ۳۶. تمرین ۴۸

۳۷. تمرین ۴۹ — ۳۸. تمرین ۵۰

۷.۱۵ تمرین

۱. فرض کنید $(1, 1)$ نقطهٔ بحرانی تابع f که مشتقهای دومش پیوسته‌اند باشد. در هر مورد دربارهٔ f چه می‌توانید بگویید؟

الف) $f_{xx}(1,1) = 4$، $f_{xy}(1,1) = 1$، $f_{yy}(1,1) = 2$

ب) $f_{xx}(1,1) = 4$، $f_{xy}(1,1) = 3$، $f_{yy}(1,1) = 2$

۲. فرض کنید $(0, 2)$ نقطهٔ بحرانی تابع g که مشتقهای دومش پیوسته‌اند باشد. در هر مورد دربارهٔ g چه می‌توانید بگویید؟

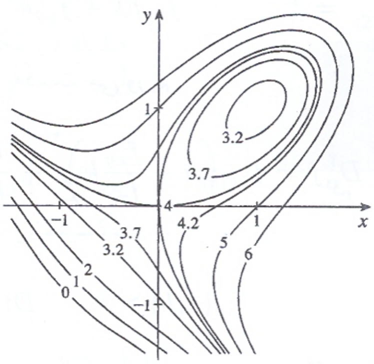
الف) $g_{xx}(0,2) = -1$، $g_{xy}(0,2) = 6$، $g_{yy}(0,2) = 1$

ب) $g_{xx}(0,2) = -1$، $g_{xy}(0,2) = 2$، $g_{yy}(0,2) = -8$

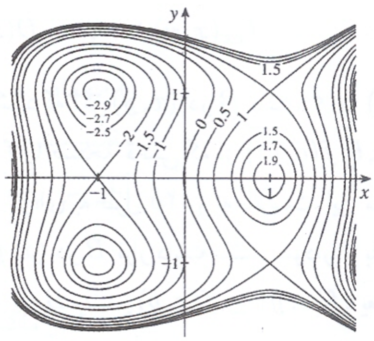
ج) $g_{xx}(0,2) = 4$، $g_{xy}(0,2) = 6$، $g_{yy}(0,2) = 9$

۳-۴ با استفاده از منحنیهای تراز در شکل جای نقطه‌های بحرانی f را حدس بزنید و حدس بزنید که در هر نقطهٔ بحرانی f نقطهٔ زینی دارد یا ماکسیمم یا مینیمم موضعی. دلیلتان را توضیح دهید. با استفاده از آزمون مشتق دوم درستی حدستان را نشان دهید.

۳. $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



۴. $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



۵-۱۸ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی و نقطه (یا نقطه‌های) زینی تابع موردنظر را پیدا کنید. اگر نرم‌افزار رسامی سه‌بعدی دارید، تابع موردنظر را با دامنه و منظری ترسیم کنید که همهٔ خصلتهای مهم این تابع را نشان دهد.

۵. $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

۶. $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

۷. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

۸. $f(x,y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

۹. $f(x,y) = (1 + xy)(x + y)$

۱۰. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

۱۱. $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

۱۲. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

۱۳. $f(x,y) = e^x \cos y$

۱۴. $f(x,y) = y \cos x$

۱۵. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

۱۶. $f(x,y) = e^y(y^2 - x^2)$

۱۷. $f(x,y) = y^2 - 2y\cos x$، $1 \le x \le 7$

۱۸. $f(x,y) = \sin x \sin y$، $-\pi < x < \pi$، $-\pi < y < \pi$

---

۱۹. نشان دهید که $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ بی‌نهایت نقطهٔ بحرانی دارد و در هر یک از آنها $D = 0$. سپس نشان دهید که f در هر نقطهٔ بحرانی مینیمم موضعی (و مطلق) دارد.

۲۰. نشان دهید که $f(x,y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ در $\left(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ مقدار ماکسیمم و در $\left(\pm 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ مقدار مینیمم دارد. همچنین نشان دهید که f بی‌نهایت نقطهٔ بحرانی دیگر دارد و در هر یک از آنها $D = 0$. کدام‌یک از آنها مقدار ماکسیمم می‌دهند؟ کدام‌یک مقدار مینیمم می‌دهند؟ نقطه‌های زینی چطور؟

۲۱-۲۴ با استفاده از نمودار و/یا منحنیهای تراز مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی و نقطه (یا نقطه‌های) زینی تابع موردنظر را تخمین بزنید. سپس با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال این مقدارها را دقیق پیدا کنید.

۲۱. $f(x,y) = x^۲ + y^۲ + x^{-۲}y^{-۲}$

۲۲. $f(x,y) = xye^{-x^۲-y^۲}$

۲۳. $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$، $۰ \le x \le ۲\pi$، $۰ \le y \le ۲\pi$

۲۴. $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$، $۰ \le x \le \frac{\pi}{۴}$، $۰ \le y \le \frac{\pi}{۴}$

۲۵-۲۸ مانند مثال ۴ با استفاده از ابزار رسامی (یا روش نیوتن یا ریشه‌یاب) نقطه‌های بحرانی f را با دقت سه رقم اعشار پیدا کنید. سپس نوع این نقطه‌های بحرانی را مشخص کنید و بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌های روی نمودار را پیدا کنید.

۲۵. $f(x,y) = x^۴ - ۵x^۲ + y^۲ + ۳x + ۲$

۲۶. $f(x,y) = ۵ - ۱۰xy - ۴x^۲ + ۳y - y^۴$

۲۷. $f(x,y) = ۲x + ۴x^۲ - y^۲ + ۲xy^۲ - x^۴ - y^۴$

۲۸. $f(x,y) = e^x + y^۴ - x^۳ + ۴\cos y$

۲۹-۳۶ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم مطلق f روی مجموعهٔ D را پیدا کنید.

۲۹. $f(x,y) = ۱ + ۴x - ۵y$، D ناحیهٔ مثلثی بسته با رأسهای $(۰,۰)$، $(۲,۰)$ و $(۰,۳)$ است.

۳۰. $f(x,y) = ۳ + xy - x - ۲y$، D ناحیهٔ مثلثی بسته با رأسهای $(۱,۰)$، $(۵,۰)$ و $(۱,۴)$ است.

۳۱. $f(x,y) = x^۲ + y^۲ + x^۲y + ۴$،
$D = \{(x,y) \mid |x| \le ۱, |y| \le ۱\}$

۳۲. $f(x,y) = ۴x + ۶y - x^۲ - y^۲$،
$D = \{(x,y) \mid ۰ \le x \le ۴, ۰ \le y \le ۵\}$

۳۳. $f(x,y) = x^۴ + y^۴ - ۴xy + ۲$،
$D = \{(x,y) \mid ۰ \le x \le ۳, ۰ \le y \le ۲\}$

۳۴. $f(x,y) = xy^۲$،
$D = \{(x,y) \mid x \ge ۰, y \ge ۰, x^۲ + y^۲ \le ۳\}$

۳۵. $f(x,y) = ۲x^۳ + y^۴$،
$D = \{(x,y) \mid x^۲ + y^۲ \le ۱\}$

۳۶. $f(x,y) = x^۳ - ۳x - y^۳ + ۱۲y$، D چهارضلعی با رأسهای $(-۲,۳)$، $(۲,۳)$، $(۲,۲)$ و $(-۲,-۲)$ است.

---

۳۷. در مورد تابعهای یک‌متغیره نمی‌شود که تابع پیوسته دو ماکسیمم موضعی داشته باشد اما مینیمم موضعی نداشته باشد. اما در مورد تابعهای دومتغیره چنین تابعهایی وجود دارند. نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = -(x^۲ - ۱)^۲ - (x^۲y - x - ۱)^۲$$

فقط دو نقطهٔ بحرانی دارد، اما در هر دو اینها ماکسیمم موضعی دارد. سپس با استفاده از کامپیوتر نموداری را با انتخاب دقیق دامنه و منظر بکشید که ببینید چطور چنین چیزی ممکن است.

۳۸. اگر تابعی یک‌متغیره روی بازه‌ای پیوسته باشد و فقط یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، آن‌وقت ماکسیمم موضعی باید ماکسیمم مطلق باشد. اما این مطلب در مورد تابعهای دومتغیره درست نیست. نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = ۳xe^y - x^۳ - e^{۳y}$$

فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و f در آنجا ماکسیمم موضعی دارد که ماکسیمم مطلق نیست. سپس با استفاده از کامپیوتر نموداری را با انتخاب دقیق دامنه و منظر رسم کنید تا ببینید چطور چنین چیزی ممکن است.

۳۹. کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۱,-۱)$ تا صفحهٔ $x + y - z = ۱$ را پیدا کنید.

۴۰. نقطه‌ای را روی صفحهٔ $x - y + z = ۴$ پیدا کنید که به نقطهٔ $(۱,۲,۳)$ نزدیکترین است.

۴۱. نقطه‌هایی را روی مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ پیدا کنید که به نقطهٔ $(۴,۲,۰)$ نزدیکترین‌اند.

۴۲. نقطه‌هایی را روی رویهٔ $y^۲ = ۹ + xz$ پیدا کنید که به مبدأ نزدیکترین‌اند.

۴۳. سه عدد مثبت پیدا کنید که مجموعشان ۱۰۰ باشد و حاصل‌ضربشان ماکسیمم.

۴۴. سه عدد مثبت پیدا کنید که مجموعشان ۱۲ باشد و مجموع مربعهایشان

تا جایی که ممکن است کوچک.

۴۵. ماکسیمم حجم جعبه‌ای مستطیلی را که در کره‌ای به شعاع r محاط شده است پیدا کنید.

۴۶. ابعاد جعبه‌ای به حجم $۱۰۰۰\ \mathrm{cm}^۳$ را پیدا کنید که مساحت جانبی‌اش مینیمم باشد.

۴۷. حجم بزرگترین جعبهٔ مستطیلی در ربع اول را پیدا کنید که سه وجهش روی صفحهٔ مختصات باشند و یک رأسش روی صفحهٔ $x + ۲y + ۳z = ۶$ باشد.

۴۸. ابعاد جعبه‌ای مستطیلی با بیشترین حجم را که مساحت جانبی کلش $۶۴\ \mathrm{cm}^۲$ است پیدا کنید.

۴۹. ابعاد جعبه‌ای مستطیلی با حجم ماکسیمم را که مجموع طولهای ۱۲ یالش مقدار ثابت c است پیدا کنید.

۵۰. کف آکواریومی به حجم مفروض V از سنگ ساخته شده است و کناره‌هایش از شیشه. اگر قیمت سنگ (مساحت هر واحدش) پنج برابر قیمت شیشه باشد، ابعاد آکواریوم را برای اینکه هزینهٔ مواد سازنده‌اش مینیمم باشد پیدا کنید.

۵۱. حجم جعبه‌ای مقوایی و سر باز باید $۳۲۰۰۰\ \mathrm{cm}^۳$ باشد. ابعاد را طوری پیدا کنید که مقدار مقوای مصرفی را مینیمم کند.

۵۲. ساختمانی مستطیلی باید طوری طراحی شود که هدررفتن حرارت مینیمم باشد. دیوارهای شرقی و غربی حرارت را با آهنگ ۱۰ واحد/$\mathrm{m}^۲$ در روز هدر می‌دهند و دیوارهای شمالی و جنوبی با آهنگ ۸ واحد/$\mathrm{m}^۲$ در روز، کف با آهنگ ۱ واحد/$\mathrm{m}^۲$ در روز و سقف با آهنگ ۵ واحد/$\mathrm{m}^۲$ در روز. هر دیوار باید دست‌کم $۳۰\ \mathrm{m}$ طول داشته باشد و ارتفاع باید دست‌کم $۴\ \mathrm{m}$ باشد و حجم باید دقیقاً $۴۰۰۰\ \mathrm{m}^۳$ باشد.

الف) دامنهٔ هدررفتن حرارت برحسب تابعی از ابعاد وجه‌ها را پیدا و رسم کنید.

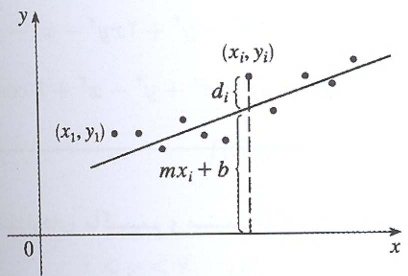
ب) ابعادی را که هدررفتن حرارت را مینیمم می‌کنند پیدا کنید. (هم نقطه‌های بحرانی را بررسی کنید هم نقطه‌های روی مرز دامنه را).

ج) اگر محدودیت روی ابعاد دیواره‌ها را برداریم می‌توانید ساختمانی را طراحی کنید که هدررفتن حرارت در آن حتی کمتر باشد؟

۵۳. اگر طول قطر جعبه‌ای مستطیل برابر با L باشد، بیشترین حجم ممکنش چقدر است؟

۵۴. سه آلل (ژنهای همردیف) A، B و O چهار نوع گروه خونی A (AA یا AO)، B (BB یا BO)، O (OO) و AB را مشخص می‌کنند. بنابر قانون هاردی-واینبرگ درصد افراد ناقل دو آلل مختلف در هر جامعه برابر است با $P = ۲pq + ۲pr + ۲rq$، که در اینجا p، q و r نسبتهای A، B و O در این جامعه‌اند. با استفاده از اینکه $p + q + r = ۱$ نشان دهید که P حداکثر $\frac{۲}{۳}$ است.

۵۵. فرض کنید که دانشمندی دلایلی دارد که بر مبنای آنها دو کمیت x و y نسبت خطی دارند، یعنی، به‌ازای مقدارهایی از m و b، دست‌کم به‌طور تقریبی، $y = mx + b$. این دانشمند آزمایشی انجام می‌دهد و داده‌هایی را به‌شکل نقطه‌های $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$، … و (x_n, y_n) جمع‌آوری می‌کند و سپس این نقطه‌ها را رسم می‌کند. این نقطه‌ها دقیقاً روی یک خط راست قرار ندارند، درنتیجه این دانشمند می‌خواهد عددهای ثابت m و b را طوری پیدا کند که خط $y = mx + b$ تا جایی که ممکن است با این نقطه‌ها «انطباق داشته باشد». (شکل را ببینید.)



فرض کنید $d_i = y_i - (mx_i + b)$ انحراف قائم نقطهٔ (x_i, y_i) از خط موردنظر باشد. با **روش کمترین مربعها** m و b را طوری تعیین می‌کنند که $\sum_{i=۱}^{n} d_i^۲$، مجموع مربعهای این انحرافها، مینیمم باشد. نشان دهید که، مطابق این روش، خطی که بیشترین انطباق را دارد وقتی به‌دست می‌آید که

$$m\sum_{i=۱}^{n} x_i + bn = \sum_{i=۱}^{n} y_i$$

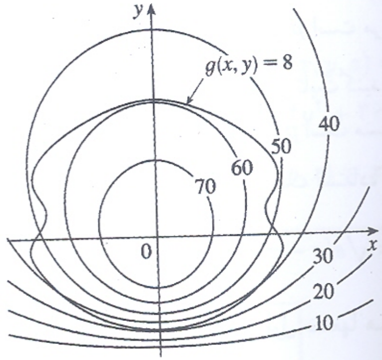
$$m\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ + b\sum_{i=۱}^{n} x_i = \sum_{i=۱}^{n} x_i y_i$$

به این ترتیب، این خط با پیدا کردن مجهولهای m و b از این دو معادله پیدا می‌شود. (بخش ۲.۱ را برای بحث بیشتر و آشنایی بیشتر با کاربردهای روش کمترین مربعها ببینید.)

۵۶. معادلهٔ صفحه‌ای را پیدا کنید که از نقطهٔ $(۱, ۲, ۳)$ می‌گذرد و از یک‌هشتم اول کمترین حجم را جدا می‌کند.

۸.۱۵ تمرین

۱. در تصویر نقشهٔ ارتفاعی f و منحنی‌ای به معادلهٔ $g(x,y)=۸$ نشان داده شده است. مقدارهای ماکسیمم و مینیمم f با شرط $g(x,y)=۸$ را تخمین بزنید. دلیلتان را توضیح دهید.



۲. الف) با استفاده از ماشین‌حساب رسام یا کامپیوتر دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ را رسم کنید. روی همین صفحهٔ نمایش چند منحنی به‌شکل $x^۲+y=c$ را رسم کنید تا اینکه دو تا از آنها را که بر دایرهٔ موردنظر دقیقاً مماس‌اند پیدا کنید. اهمیت مقدار c برای این دو منحنی در چیست؟

ب) با استفاده از ضریبهای لاگرانژ مقدارهای اکسترمم

$$f(x,y)=x^۲+y$$

با شرط $x^۲+y^۲=۱$ را پیدا کنید. پاسختان را با پاسختان به قسمت (الف) مقایسه کنید.

۳-۱۷ با استفاده از ضریبهای لاگرانژ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم تابع موردنظر را تحت شرط (یا شرطهای) داده‌شده پیدا کنید.

۳. $f(x,y)=x^۲+y^۲$؛ $\quad xy=۱$

۴. $f(x,y)=۴x+۶y$؛ $\quad x^۲+y^۲=۱۳$

۵. $f(x,y)=x^۲y$؛ $\quad x^۲+۲y^۲=۶$

۶. $f(x,y)=e^{xy}$؛ $\quad x^۳+y^۳=۱۶$

۷. $f(x,y,z)=۲x+۶y+۱۰z$؛ $\quad x^۲+y^۲+z^۲=۳۵$

۸. $f(x,y,z)=۸x-۴z$؛ $\quad x^۲+۱۰y^۲+z^۲=۵$

۹. $f(x,y,z)=xyz$؛ $\quad x^۲+۲y^۲+۳z^۲=۶$

۱۰. $f(x,y,z)=x^۲y^۲z^۲$؛ $\quad x^۲+y^۲+z^۲=۱$

۱۱. $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲$؛ $\quad x^۴+y^۴+z^۴=۱$

۱۲. $f(x,y,z)=x^۴+y^۴+z^۴$؛ $\quad x^۲+y^۲+z^۲=۱$

۱۳. $f(x,y,z,t)=x+y+z+t$؛ $\quad x^۲+y^۲+z^۲+t^۲=۱$

۱۴. $f(x_۱,x_۲,\dots,x_n)=x_۱+x_۲+\cdots+x_n$؛
$$x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲=۱$$

۱۵. $f(x,y,z)=x+۲y$؛ $\quad x+y+z=۱$، $\quad y^۲+z^۲=۴$

۱۶. $f(x,y,z)=۳x-y-۳z$؛ $\quad x+y-z=۰$، $\quad x^۲+۲z^۲=۱$

۳۹. تمرین ۵۳

۴۰. حجم ماکسیمم و حجم مینیمم جعبه‌ای مستطیلی را که مساحت جانبی‌اش 1500 cm^2 است و مجموع طولهای یالهایش 200 cm است پیدا کنید.

۴۱. صفحهٔ $2 = 2z + y + x$ سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ را در یک بیضی قطع می‌کند. نقطه‌های روی این بیضی را که به مبدأ نزدیکترین و دورترین‌اند پیدا کنید.

۴۲. صفحهٔ $5 = 8z + 3y - 4x$ مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ را در یک بیضی قطع می‌کند.

الف) این مخروط، صفحه و بیضی را رسم کنید.

ب) با استفاده از روش ضریبهای لاگرانژ بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ها روی این بیضی را پیدا کنید.

۴۳-۴۴ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم f را تحت شرطهای داده شده پیدا کنید. با استفاده از سیستمهای جبری کامپیوتری دستگاههای معادله‌هایی را که هنگام استفاده از روش ضریبهای لاگرانژ به آنها برمی‌خوریم حل کنید. (اگر سیستم جبری کامپیوتری‌تان فقط یک جواب پیدا کرد، باید از دستورهای دیگر استفاده کنید.)

۴۳. $f(x, y, z) = ye^{x-z}$؛ $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$، $xy + yz = 1$

۴۴. $f(x, y, z) = x + y + z$؛ $x^2 - y^2 = z$، $x^2 + z^2 = 4$

۴۵. الف) مقدار ماکسیمم

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

را با شرط اینکه x_1، x_2، ... و x_n عددهایی مثبت‌اند و $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$، که در اینجا c عددی ثابت است، پیدا کنید.

ب) از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که اگر x_1، x_2، ... و x_n عددهایی مثبت باشند، آن‌وقت

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

این نابرابری یعنی اینکه میانگین هندسی n عدد از میانگین حسابی این عددها بزرگتر نیست. تحت چه شرطهایی این دو میانگین برابرند.

۴۶. الف) $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ را با شرطهای $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ و $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ ماکسیمم کنید.

ب) قرار دهید

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}}, \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

نشان دهید که اگر a_1، ...، a_n، b_1، ...، b_n عددهایی حقیقی باشند،

$$\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_j^2}\,\sqrt{\sum b_j^2}$$

این نابرابری به نابرابری کشی‌ـ‌شوارتز معروف است.

پروژهٔ کاربردی علوم موشکی

خیلی از موشکها مانند پگاسوس XL که اخیراً از آن برای قراردادن ماهواره‌ها استفاده می‌شود و ساترن V که اولین‌بار انسان را به ماه برد، طوری طراحی شده‌اند که در راه رسیدن به فضا از سه واحد سوخت استفاده می‌کنند. واحد اول بزرگتر است و در آغاز موشک را به حرکت درمی‌آورد تا اینکه سوختش تمام شود، که در این زمان واحد سوختی جدا می‌شود تا جرم موشک کم شود. واحدهای کوچکتر دوم و سوم به طریق مشابه عمل می‌کنند تا محمولهٔ موشک را در مدار دور زمین قرار دهند. (با این طراحی، دست‌کم به دو واحد سوختی احتیاج است تا به سرعتهای لازم دسترسی پیدا کرد، و معلوم شده است که استفاده از سه واحد سوختی منجر به نسبتی متعادل بین هزینه و بهره‌وری می‌شود.) در اینجا هدفمان این است که جرم هر سه واحد را جداگانه مشخص کنیم، به‌طوری که جرم کل موشک مینیمم شود و در عین حال بتوان به سرعت دلخواه دست یافت.

در مورد موشکهای با یک واحد سوخت که سوخت را با آهنگ ثابت مصرف می‌کنند، تغییر سرعت ناشی

۳۹. تمرین ۵۳

۴۰. حجم ماکسیمم و حجم مینیمم جعبه‌ای مستطیلی را که مساحت جانبی‌اش $1500\ \text{cm}^2$ است و مجموع طولهای یالهایش $200\ \text{cm}$ است پیدا کنید.

۴۱. صفحهٔ $x + y + 2z = 2$ سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ را در یک بیضی قطع می‌کند. نقطه‌های روی این بیضی را که به مبدأ نزدیکترین و دورترین‌اند پیدا کنید.

۴۲. صفحهٔ $4x - 3y + 8z = 5$ مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ را در یک بیضی قطع می‌کند.

الف) این مخروط، صفحه و بیضی را رسم کنید.

ب) با استفاده از روش ضریبهای لاگرانژ بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ها روی این بیضی را پیدا کنید.

CAS ۴۳-۴۴ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم f را تحت شرطهای داده‌شده پیدا کنید. با استفاده از سیستمهای جبری کامپیوتری دستگاههای معادله‌هایی را که هنگام استفاده از روش ضریبهای لاگرانژ به آنها برمی‌خوریم حل کنید. (اگر سیستم جبری کامپیوتری‌تان فقط یک جواب پیدا کرد، باید از دستورهای دیگر استفاده کنید.)

۴۳. $f(x, y, z) = ye^{x-z}$؛ $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$، $xy + yz = 1$

۴۴. $f(x, y, z) = x + y + z$؛ $x^2 - y^2 = z$، $x^2 + z^2 = 4$

۴۵. الف) مقدار ماکسیمم

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

را با شرط اینکه x_1، x_2، ... و x_n عددهایی مثبت‌اند و $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$، که در اینجا c عددی ثابت است، پیدا کنید.

ب) از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که اگر x_1، x_2، ... و x_n عددهایی مثبت باشند، آن‌وقت

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

این نابرابری یعنی اینکه میانگین هندسی n عدد از میانگین حسابی این عددها بزرگتر نیست. تحت چه شرطهایی این دو میانگین برابرند.

۴۶. الف) $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ را با شرطهای $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ و $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ ماکسیمم کنید.

ب) قرار دهید

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}}, \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

نشان دهید که اگر a_1، ...، a_n، b_1، ...، b_n عددهایی حقیقی باشند،

$$\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_j^2}\sqrt{\sum b_j^2}$$

این نابرابری به نابرابری کشی-شوارتز معروف است.

پروژهٔ کاربردی — علوم موشکی

خیلی از موشکها مانند پگاسوس XL که اخیراً از آن برای قراردادن ماهواره‌ها استفاده می‌شود و ساترن V که اولین‌بار انسان را به ماه برد، طوری طراحی شده‌اند که در راه رسیدن به فضا از سه واحد سوخت استفاده می‌کنند. واحد اول بزرگتر است و در آغاز موشک را به حرکت درمی‌آورد تا اینکه سوختش تمام شود، که در این زمان واحد سوختی جدا می‌شود تا جرم موشک کم شود. واحدهای کوچکتر دوم و سوم به طریق مشابه عمل می‌کنند تا محمولهٔ موشک را در مدار دور زمین قرار دهند. (با این طراحی، دست‌کم به دو واحد سوختی احتیاج است تا به سرعتهای لازم دسترسی پیدا کرد، و معلوم شده است که استفاده از سه واحد سوختی منجر به نسبتی متعادل بین هزینه و بهره‌وری می‌شود.) در اینجا هدفمان این است که جرم هر سه واحد را جداگانه مشخص کنیم، به‌طوری که جرم کل موشک مینیمم شود و در عین حال بتوان به سرعت دلخواه دست یافت.

در مورد موشکهای با یک واحد سوخت که سوخت را با آهنگ ثابت مصرف می‌کنند، تغییر سرعت ناشی