

تمرین های درس ریاضی عمومی، شماره ۹

سری ها

(a) همگرایی یا واگرایی سری های زیر را تعیین کنید

- ۱)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^r e^{-n}$
- ۲)  $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^p, \quad p \in (0, \infty)$
- ۳)  $\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^p, \quad p > 0$
- ۴)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n} \quad (0 < q < p)$
- ۵)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}, \quad p \in (0, \infty)$
- ۶)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$
- ۷)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$
- ۸)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n!}{n^n})^n$
- ۹)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$
- ۱۰)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}, \quad a > 0$
- ۱۱)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^{\sqrt[n]{n}}}$
- ۱۲)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$
- ۱۳)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\sqrt[n]{n}}}$
- ۱۴)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$
- ۱۵)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}$
- ۱۷)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^p}, \quad p \in (0, +\infty)$
- ۱۸)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} \sinh n$
- ۱۹)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}, \quad p > 0$
- ۲۰)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$
- ۲۱)  $\sum_{n=2}^{\infty} n^p (\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \quad p > 0$
- ۲۲)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$
- ۲۳)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$
- ۲۴)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$
- ۲۵)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n}$

(b) با در نظر گرفتن  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  که در آن  $a_n = \begin{cases} 2^{2-n} & n = 2k \\ 2^{1-n} & n = 2k+1 \end{cases}$  نشان دهید آزمون ریشه از

آزمون نسبت قوی تر است.

(c) نشان دهید اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرایی مطلق باشد آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ،  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$  همگرایی مطلق هستند.

(d) شعاع و فاصله همگرایی سری های زیر را به دست آورید

- ۱)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$   
۲)  $\sum_{n=2}^{\infty} (x+1)^n n \ln n$   
۳)  $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} x^n \quad 0 < c < 1$

(e) نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  همگراست.

(f) فرض کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد. نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_{n+1})^{1/2}$  نیز همگراست.

(g) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$  همگرا باشد نشان دهید  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  نیز همگراست.

موفق و سربلند باشید.

گروه ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیر