

تمرین های درس ریاضی عمومی، شماره ۸  
انتگرال های ناسره و کاربردهای انتگرال

(۱) همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را تعیین کنید

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4} dx \quad 2) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^4} dx \quad 3) \int_0^{\infty} \frac{x^5}{(x^2+1)^4} dx$$

(۲) مقدار انتگرال زیر را که در نظریه الکترومغناطیس کاربرد دارد، بیابید.

$$P = k \int_0^{\infty} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

(۳) فرض کنید  $R$  ناحیه محدود به نمودار  $y = \frac{1}{x}$ ، محور  $x$  ها و خطوط  $x = 1$ ،  $x = b$  باشد. فرض کنید  $H$  جسم حادث از دوران  $R$  حول محور  $x$  باشد.

•  $V$ ، حجم حادث از دوران  $H$  را به دست آورید.

•  $S$ ، سطح حادث از دوران  $H$  را به دست آورید.

• حد  $V$  وقتی  $b \rightarrow \infty$  را بیابید.

• حد  $S$  وقتی  $b \rightarrow \infty$  را بیابید.

از مقایسه این دو حد چه نتیجه ای می توان گرفت؟

سطح حادث از دوران نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  وقتی که  $x \in [1, \infty)$  به شیپور گابریل موسوم است.

(۴) درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

• اگر  $f$  روی  $[0, +\infty)$  پیوسته باشد و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  آنگاه  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  وجود دارد.

• اگر  $f$  روی  $[0, +\infty)$  پیوسته باشد و  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  همگرا باشد آنگاه  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$ .

• اگر  $f'$  روی  $[0, +\infty)$  پیوسته باشد و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  آنگاه  $\int_0^{\infty} f(x) dx = -f(0)$ .

• اگر نمودار  $f$  نسبت به مبدا و محور  $y$  متقارن باشد آنگاه  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  همگراست اگر و فقط اگر  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  همگرا باشد.

(۵) در تمرین های زیر با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء درستی تساوی ها را به اثبات برسانید

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \quad \bullet$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad \bullet$$

$$\int \cos^m x \sin^n x dx = -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^m x \sin^{n-2} x dx \quad \bullet$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-2} + \frac{n-2}{n-2} \int \sec^{n-2} x dx \quad \bullet$$

(۶) با استفاده از فرمول های فوق روابط زیر را ثابت کنید

• اگر  $n$  با  $n \geq x$  یک عدد فرد باشد آنگاه

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right).$$

• اگر  $n$  زوج باشد ( $n \geq 2$ ) آنگاه

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{5}{6}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(۷) با استفاده از جایگزاری توابع مثلثاتی و فرمول های والیس نشان دهید

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{2n} dx = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

موفق و سربلند باشید.

گروه ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیر