

تمرین های درس ریاضی عمومی
اعداد مختلط

(۱) مختصات قطبی هر یک از اعداد مختلط زیر را بنویسید

$$\begin{array}{llll} a)(3, 0) & b)(-3, 0) & c)(0, -\pi) & d)(\pi, -\pi) \\ e)(-\sqrt{3}, 1) & f)(1, \sqrt{2}) & g)(-1, -1) & h)(x, y). \end{array}$$

(۲) هر یک از اعداد زیر را به صورت $x + iy$ بنویسید.

$$\begin{array}{llll} a)(1 + 2i)^2 & b)\frac{5}{-3+4i} & c)\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 & d)(1+i)^n + (1-i)^n \\ e)(2-i)^4 & f)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 & g)\frac{(2-i)^2(3+4i)}{25} & h)\frac{(2z+5)(\sqrt{2}-i)}{2z+5}. \end{array}$$

(۳) مقادیر زیر را بیابید

$$a)\sqrt{i} \quad b)\sqrt{-i} \quad c)\sqrt{1+i} \quad d)\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

(۴) تمام چهار مقدار $\sqrt[4]{-1}$ را بیابید.

(۵) مقادیر اعداد $\sqrt{-i}$ و $\sqrt[3]{-i}$ را بیابید.

(۶) قدرمطلق اعداد $(2+i)(3+i)(1+i)$ و $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$ را بیابید.

(۷) در هر یک از موارد زیر مجموعه نقاطی از صفحه را مشخص کنید که در رابطه داده شده صدق می کنند.

$$\begin{array}{lll} a) |z| > 1 & b) \arg z = \frac{15}{4}\pi & c) |z-1| < |z+1| \\ d) |z|^2 - 3|z| + 2 < 0 & e) |z-i| = 1 & f) |z-1| < 2|z+1|. \\ g) |z-i| + |z+i| < 4 \end{array}$$

(۸) اگر $a = \frac{1}{z^2+1}$ باشد آنگاه $\operatorname{Re}(a)$ و $\operatorname{Im}(a)$ را بیابید.

(۹) مقدار $\left(\frac{2+i}{1-(1-2i)^2}\right)^3$ را محاسبه کنید.

(۱۰) مکان هندسی نقاطی که $|z-z_1| + |z-z_2| \leq a$ که در آن z_1 و z_2 اعداد مختلط و ثابت، و a اسکالری نامنفی است را بیابید.

(۱۱) ثابت کنید برای $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$

$$\sin z_2 - \sin z_1 = 2 \cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right).$$

(۱۲) ثابت کنید اگر z_2, z_1 اعداد مختلط باشند آنگاه

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(۱۳) معادلات زیر را حل کنید.

$$a) z^3 = -i \quad b) z^2 = -4 \quad c) z^2 = \frac{1-i}{1+i} \quad d) z^n = nz.$$

(۱۴) معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} a) z^5 &= 32 & b) z^3 + 3z^2 + 3z - 1 &= 0 & c) z^3 &= -i \\ d) z^2 &= 1+i & e) z^2 + (\alpha + i\beta)z + \gamma + i\delta &= 0. \end{aligned}$$

(۱۵) معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & z^3 - 3z^2 + 6z - 8 = 0 & \bullet \\ & z^3 - 2z - 4 = 0 & \bullet \\ & z^3 - 3\sqrt{3}z - 4 = 0 & \bullet \\ & z^3 + 3iz + \sqrt{2}(1+i) = 0 & \bullet \end{aligned}$$

(۱۶) اگر z و w دو عدد مختلط باشند و $\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$ ، ثابت کنید $|z| = 1$ یا $|w| = 1$.

(۱۷) اعداد a و b را طوری بیابید که $z = 1+i$ ریشه‌ای از معادله $z^5 + az^3 + b = 0$ باشد.

(۱۸) معادله $z^3 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{18}$ را در مجموعه اعداد مختلط حل کنید.

(۱۹) ثابت کنید $\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta$.

(۲۰) ثابت کنید

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\cos \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (\text{الف})$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (\text{ب})$$

(۲۱) اگر $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ ، ثابت کنید $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$.

(۲۲) ثابت کنید:

$$\left(\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}\right)^n = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha}$$

(۲۳) به کمک اعداد مختلط ثابت کنید: $(\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$

a) $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$

b) $\sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$

c) $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$

(۲۴) ثابت کنید اگر z_1, z_2, \dots, z_n ریشه‌های n ام عدد -1 باشند آنگاه:

a) $z_1 - z_2 + \dots + (-1)^{n+1} z_n = 0$

b) $z_1 z_2 \dots z_n = 1$

(۲۵) ثابت کنید اگر $\sin \theta \neq 0$

a) $\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \cos \theta - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right\}$

b) $\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin \theta} = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right\}$

c) $\cos 2n\theta = (-1)^n \prod_{k=1}^n \left\{ 1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)} \right\}$

موفق و سربلند باشید.

گروه ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیر