

تمرین های درس ریاضی عمومی
مشتق پذیری، چندجمله‌ای تیلر و توابع هذلولوی

(۱) نشان دهید $\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

(۲) تابع مشتق توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y = \sqrt{\tan^{-1}(y)}$ ۲) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$ ۳) $f(x) = x \ln(\arctan(x))$
۴) $f(x) = \sin^{-1}(2x + 1)$ ۵) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \sec^{-1}(x)$ ۶) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \arccos(x)$

(۳) تابع مشتق توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y = \cos^{-1}(e^{2x})$ ۲) $y = \arctan(\cos(\theta))$ ۳) $y = \tan^{-1}(x - \sqrt{1 + x^2})$
۴) $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(\frac{1}{t})$ ۵) $y = \arccos(\frac{b+a \cos(x)}{a+b \cos(x)})$

(۴) تابع مشتق توابع داده شده را بیابید و دامنه تابع مشتق را نیز تعیین کنید.

۱) $f(x) = \arcsin(e^x)$ ۲) $g(x) = \cos^{-1}(3 - 2x)$ ۳) $f(x) = \ln(1 + x) + \arcsin x / 2$

(۵) مشتق هریک از توابع زیر را به دست آورید.

$f(x) = \ln \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2 \arctan \sqrt{\sin x}$ •
 $f(x) = \frac{2}{3} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \arctan x$ •
 $f(x) = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$ •
 $f(x) = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan 2x - 1\sqrt{3}$ •

(۶) اگر $\tan^{-1}(xy) = 1 + x^2 y$ را بیابید.

(۷) اگر $g(x) = x \sin^{-1}(x/4) + \sqrt{16-x^2}$ را بیابید.

(۸) معادله خط مماس بر منحنی $y = 3 \arccos(x/2)$ در نقطه $(1, \pi)$ را بیابید.

(۹) تابع مشتق هریک از توابع زیر را بیابید.

۱) $h(t) = t^3 - 3^t$ ۲) $g(x) = x^2 4^x$ ۳) $y = 5^{-1/x}$
۴) $y = 1 \circ \tan \theta$ ۵) $f(u) = (2^u + 2^{-u})^{10}$ ۶) $y = 2^2 x^2$
۷) $f(x) = \log_2(1 - 3x)$ ۸) $f(x) = \log_5(xe^x)$ ۹) $f(x) = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

۱۰) تابع مشتق هریک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} ۱) y = \sinh^2 x & ۲) y = \operatorname{arcsinh} \ln x & ۳) y = e^{\alpha x} \cosh \beta x \\ ۴) y = \operatorname{arctanh}(\tan x) & ۵) y = \tanh^2 x & ۶) y = \operatorname{arc} \coth(\sec x) \\ ۷) y = \ln \sinh x^2 / a^2 & ۸) y = \operatorname{arctanh} \frac{2x}{1+x^2} & \end{array}$$

$$۹) y = \frac{1}{4}(x^2 - 1)\operatorname{arctanh} x + \frac{1}{4}x \quad ۱۰) y = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right)\operatorname{arcsinh} x - \frac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}.$$

۱۱) نشان دهید تابع $y = xe^{-x}$ در رابطه $xy' = (1-x)y$ صدق می کند.

۱۲) نشان دهید تابع $y = xe^{-x^2/2}$ در رابطه $xy' = (1-x^2)y$ صدق می کند.

۱۳) نشان دهید تابع $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$ در رابطه $xy' = y(y \ln x - 1)$ صدق می کند.

۱۴) نشان دهید تابع مشتق یک تابع مشتق پذیر فرد یک تابع زوج است و تابع مشتق یک تابع مشتق پذیر زوج فرد است.

۱۵) نشان دهید تابع مشتق یک تابع متناوب یک تابع متناوب است.

۱۶) مقدار تقریبی هریک از مقادیر زیر را به روش تقریب خطی محاسبه کنید، سپس حداکثر خطای محاسبه را با استفاده از مشتق دوم تخمین بزنید.

$$\sqrt[3]{28} \quad \bullet$$

$$(1.001)^{10} \quad \bullet$$

$$\sin 1/100 \quad \bullet$$

$$\frac{1}{1001} \quad \bullet$$

$$\frac{1}{(5.01)^2} \quad \bullet$$

۱۷) فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $0 < h < 1$. توضیح دهید که چرا می توان انتظار داشت تقریب $\sqrt[n]{1+h} \approx 1 + \frac{h}{n}$ دقیق تر از $\sqrt[n]{1-h} \approx 1 - \frac{h}{n}$ است.

۱۸) تابع $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ دوبار مشتق پذیر است، $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sin(x^2 + x + 1)$ فرض کنید $g = f \circ f$. مقادیر $g'(0)$ و $g''(0)$ را به دست آورید.

۱۹) فرض کنید اعداد حقیقی a_1, \dots, a_n داده شده اند. نشان دهید $\sum_{i=1}^n (x - a_i)^2$ وقتی کمترین مقدار ممکن است که $x = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ باشد.

۲۰) دایره ای به شعاع R داده شده است.

الف) نشان دهید در میان مستطیل های محاط در این دایره، مربع بیشترین مساحت ممکن را دارد.
ب) ثابت کنید در میان مثلث های متساوی الساقین محاط در این دایره، مثلث متساوی الاضلاع بیشترین مساحت ممکن را دارد.

۲۱) در میان قوطی های سرباز به شکل مکعب مستطیل با قاعده مکعب مربع شکل که حجمشان مقدار ثابت V است، ضلع قاعده و ارتفاع چگونه تعیین شوند تا کمترین مصالح برای ساخت آنها به کار رود.

۲۲) کپسول گازی به شکل استوانه با سقف نیمکره داده شده است. نسبت ارتفاع استوانه به شعاع نیمکره چگونه اختیار شود تا با حجم داده شده حداقل مصالح در ساخت کپسول به کار گرفته شود.

۲۳) نشان دهید در چند جمله ای تیلر هر تابع زوج، ضریب جمله های درجه فرد صفر است و هر تابع فرد، ضریب جمله های درجه زوج چند جمله ای تیلر آن صفر است.

۲۴) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد.

الف) چند جمله ای تیلر درجه ۳ تابع $\frac{1}{1+x}$ را حول نقطه \circ بنویسید.

ب) چند جمله ای تیلور درجه k تابع $\frac{1}{1+x}$ را با چند جمله ای تیلور درجه k آن به طور دقیق پیدا کنید.

۲۵) فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه $[a, b]$ دو بار مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = \circ$. همچنین فرض کنید نقطه ای مانند c بین a و b وجود داشته باشد به طوری که $f(c) > \circ$. ثابت کنید عددی مانند η بین a و b وجود دارد به طوری که $f''(\eta) < \circ$.

۲۶) فرض کنید تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = \circ$. ثابت کنید که به ازای هر عدد حقیقی مانند λ نقطه ای مانند c در بازه (a, b) وجود دارد به طوری که $f'(c) = \lambda f(c)$.

۲۷) فرض کنید تابع f بر $[0, 1]$ پیوسته و بر $(0, 1)$ مشتق پذیر باشد و نیز $f(0) = \circ$. تابع g را بر $(0, 1)$ با ضابطه $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ تعریف می کنیم. نشان دهید هرگاه f' بر $(0, 1)$ صعودی باشد، g نیز بر این بازه صعودی است.

۲۸) با استفاده از قضیه ژل ثابت کنید معادله $x = \cot x$ در بازه $(0, \pi/2)$ جواب دارد.

۲۹) فرض کنید تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق پذیر باشد. بعلاوه فرض کنید $f(a) = a > \circ$ و $f(b) = b$. ثابت کنید عددی مانند c در $[a, b]$ یافت می شود به طوری که خط مماس بر منحنی در نقطه به طول c از مبدا مختصات می گذرد.

۳۰) فرض کنید f تابعی حقیقی باشد که بر $(0, +\infty)$ مشتق پذیر است و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \circ$. تابع g را به صورت $g(x) := f(x+1) - f(x)$ تعریف کنید. نشان دهید $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \circ$.