تمرین های درس ریاضی عمومی
مشتق پذیری، قضیه مقدار میانگین، و کاربرد های آن

۱) تمام توابع f را بیابید که در تساوی های زیر صدق می کنند.

- $f'(x) = \sin x$
- $f''(x) = x^{۳}$
- $f'''(x) = x + x^{۲}$

۲) درستی قضیه مقدار میانگین را در مورد هریک از تابع های زیر روی بازه داده شده بررسی کنید.

- (الف) $f(x) = x^{۲} - ۳x + ۱$ روی $[۰, ۱]$.
- (ب) $f(x) = \frac{۱-x}{۲x-۵}$ روی $[-۲, ۱]$.
- (پ) $f(x) = \sin x + \cos x$ روی $[۰, \pi]$.

۳) نشان دهید دقیقاً به ازای دومقدار حقیقی از x رابطه $x^{۲} = x\sin x + \cos x$ برقرار است.

۴) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نامساوی های زیر را ثابت کنید

- (الف) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
- (ب) اگر $۰ < y \leq x$ و $n = ۱, ۲, \ldots$ آنگاه .

$$ny^{n-۱}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-۱}(x - y).$$

۵) نشان دهید در میان تمام مربع مستطیل هایی که محیط ثابت p دارند، مربع بیشترین محیطرا دارد.

۶) یک مخزن آب به شکل مخروط مستدیر قائم است که راس آن به سمت پائین است. ارتفاع آن ۱۰ متر و شعاع قاعده‌اش ۱۵ متر است. آب به میزان ثابت ۱ متر مکعب در ثانیه از ته مخزن خارج می شود و به میزان ثابت c متر مکعب در ثانیه وارد آن می شود. c را طوری تعیین کنید که سطح آب در لحظه‌ای که عمق آن ۲ متر است به میزان ۴ متر در ثانیه در حال بالا آمدن باشد.

۷) می خواهیم پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و یک نیم دایره در بالای آن بسازیم به طوری که قطر نیمدایره مساوی قاعده مستطیل باشد و بخش مستطیلی شکل از شیشه سفید و بخش نیمدایره از شیشه رنگی باشد، به گونه‌ای که در هر فوت مربع فقط به اندازه نصف شیشه سفید نور عبوردهد. محیط کل پنجره برابر مقدار ثابت P است. ابعاد پنجره را برحسب P طوری تعیین کنید که حداکثر نور را از خود عبور دهد.

۸) فرض کنید $x > ۰$. نشان دهید نامساوی $f(x) = x + \frac{۱}{x} \geq ۲$ همواره برقرار است.

۹) فرض کنید تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = ۵x^{۲} + Ax^{-۵} \;,\; x > ۰$، که در آن A ثابت مثبتی است، داده شده است. کوچکترین A یی را بیابید که به ازای هر $x > ۰$، $f(x) \geq ۲۴$.

۱۰) اعداد حقیقی a و b داده شده اند. با استفاده از مشتق ثابت کنید تابع $f(x) = x^{۲} + ax + b$ به ازای $x = a/۲$ مینیمم دارد. نتیجه بگیرید که شرط لازم و کافی برای این که معادله $f(x) = ۰$ ریشه حقیقی داشته باشد این است که $a^{۲} \geq ۴b$.

۱۱) اعداد حقیقی p, q داده شده اند. معادله $x^{۳} + px + q = ۰$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید شرط لازم وکافی برای این که این معادله فقط یک ریشه داشته باشد این است که $۴p^{۳} + ۲۷q^{۲} > ۰$.

۱۲) فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد به طوری که $f'(x) = (x^{۲} \sin x)/(۱ + x^{۴})$. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی مانند a, b نابرابری زیر درست است.

$$| f(a) - f(b) | \leq | a - b | /۲$$

۱۳) فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر است و $f(۰) = f(۱) = ۰$ و $f'(۰) > ۰$ و $f'(۱) > ۰$. نشان دهید معادله $f'(x) = ۰$ در بازه $]۰, ۱[$ لااقل دو ریشه دارد.

۱۴) به کمک $\lim_{\theta \to ۰} \frac{۱ - \cos\theta}{\theta} = ۰$ و قضیه مقدار میانگین ثابت کنید

$$\lim_{\theta \to ۰} \frac{\sin\theta - \theta}{\theta^{۲}} = ۰$$

۱۵) نشان دهید تابع زیر همه جا مشتق پذیر است و دستور مشتق آن را بیابید.

$$S(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰. \end{cases}$$

۱۶) تابع چندجمله‌ای $p(x) = a_{۰} + a_{۱}x + \ldots + a_{n}x^{n}$ را با ضرایب حقیقی در نظربگیرید. نشان دهید اگر به ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$a_{۰} + ۲a_{۱}x + ۳a_{۲}x^{۲} + \cdots + (n + ۱)a_{n}x^{n} > ۰$$

آنگاه معادله $p(x) = ۰$ ریشه حقیقی ندارد. (راهنمایی: ثابت کنید $x = ۰$ تنها ریشه معادله $xp(x) = ۰$ است).

۱۷) نشان دهید اگر $\frac{a_{۰}}{۱} + \frac{a_{۱}}{۲} + \frac{a_{۲}}{۳} \cdots + \frac{a_{n}}{n+۱} = ۰$ آنگاه

$$a_{۰} + a_{۱}x + \cdots + a_{n}x^{n} = ۰.$$

دارای یک ریشه در $[۰, ۱]$ است.