تمرین های درس ریاضی عمومی،شماره ۱۲

سری های صوری

۱) **تعریف سری توانی** : اگر x یک متغییر باشد، آنگاه سری

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

را یک سری توانی می نامند. به طور کلی سری

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \ldots + a_n (x-c)^n + \ldots$$

یک سری توانی حول c نامیده می شود که c یک عدد ثابت است.
سری توانی

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \ldots + a_n (x-c)^n + \ldots$$

را می توان به عنوان یک تابع از x درنظر گرفت. دامنه تعریف f مجموعه x هایی است که به ازای آنها سری همگراست.

۲) **قضیه:** برای هر سری توانی دقیقاً یکی از گزاره های زیر صحیح است.
۱) سری فقط در c همگراست.
۲) یک عدد $R > 0$ وجود دارد به طوری که سری به طورمطلق برای x هایی که در $\mid x - c \mid$ صدق می کنند همگراست. و واگراست اگر $\mid x - c \mid > R$
۳) سری برای همه $x \in \mathbb{R}$ همگراست.
در قضیه فوق عدد R را شعاع همگرایی سری توانی می نامند. اگر سری برای $x = 0$ همگراباشد شعاع همگرایی صفر است و اگر برای همه x ها همگراباشد شعاع همگرایی تمام $\mathbb{R}$ است. مجموعه تمام x هایی که به ازای آنها سری همگراست را بازه همگرایی می نامند.
از آزمون نسبت می توان بای پیدا کردن شعاع همگرایی استفاده کرد. در واقع سری

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \ldots + a_n (x-c)^n + \ldots$$

با ازای $x = x_0$ اگر

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}(x_0 - c)^{n+1}}{a_n (x_0 - c)^n} \mid = \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid\mid x_0 - c \mid < 1$$

سری همگراست. بنابراین اگر $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ آنگاه به ازای هر x که در رابطه $\mid x - c \mid < \frac{1}{\ell} = R$ صدق کند سری همگرا خواهد بود.

اگر یک سری توانی داده شده باشد، اعمال مشتق گیری و انتگرال گیری روی تک تک جملات سری‌ای توانی به دست می دهد که ممکن است با مشتق یاانتگرال تابع حد سری توانی برابر نباشد. قضیه زیر شرایط برابری مزکور را بیان می کند.

قضیه: فرض کنیم $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots$ یک سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$ باشد. آنگاه روی $(c-R, c+R)$، f یک تابع پیوسته، دیفرانسیل پذیر و انتگرال پذیر است. به علاوه مشتق و انتگرال f به صورت زیر است.

1) $f'(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$
2) $\int f(x)dx = C + \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n-1}}{n+1}$.

شعاع همگرایی سری هایی که از مشتق یا انتگرال گیری به دست می آید برابر شعاع همگرایی سری اولیه است. لیکن بازه همگرایی ممکن است در نقاط انتهایی تفاوت داشته باشد.

۳) مطلوب است تعیین شعاع همگرایی سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$

۴) مطلوب است تعیین شعاع همگرایی سری $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$

۵) شرایط بکار گیری قضیه فوق را درمورد سری $e^x = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ بکار برید.

۶) شرایط بکار گیری قضیه فوق را درمورد سری $f(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ بکاربرید و انتگرال و مشتق سری را به دست آورید.

۷) شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری های توانی زیر را به دست آورید.

a) $\Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$
b) $\Sigma_{n=0}^{\infty} (4x)^n$
c) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n^2}$
c) $\Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$
d) $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$
e) $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

۸) فرض کنید $f(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ و $g(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
a) فاصله همگرایی f و g را بیابید.
b) نشان دهید $f'(x) = g(x)$
c) نشان دهید $f(x) = g'(x)$

۹) تابع بسل از مرتبه صفر.
تابع $J_\circ(x) = x\Sigma_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n}}{۲^{۲n}(n!)^۲}$ را تابع بسل از مرتبه صفر می نامند.
a) نشان دهید این سری به ازای تمام x ها همگراست.
b) نشان دهید این سری در معادله $x^۲J_\circ'' + xJ_\circ' + x^۲J_\circ = \circ$ صدق می کند.

۱۰) تابع بسل از مرتبه یک.
تابع $J_۱(x) = \Sigma_{n=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n}}{۲^{۲n+۱}n!(n+۱)!}$ را تابع بسل از مرتبه یک می نامند.
a) نشان دهید این سری به ازای تمام x ها همگراست.
b) نشان دهید این سری در معادله $x^۲J_۱'' + xJ_۱' + (x^۲ - ۱)J_۱ = \circ$ صدق می کند.
c) نشان دهید $J_\circ'(x) = -J_۱(x)$.

موفق و سربلند باشید.
گروه ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیر