K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

۳۷. فرض کنید $\vec{f}(t)=(t^2+1)\vec{i}+t^3\vec{j}$ و $\vec{g}(t)=\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}$. مطلوب است

الف) $\vec{f}(a+b)$ ب) $\vec{g}(t+\Delta t)$ ج) $\vec{f}(\sin t)\times\vec{g}(t^2+1)$

۳۸. اگر $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. نشان دهید $\vec{b}$ در $S_4(\vec{a})$ قرار دارد و $\delta>0$ را بیابید به طوری که $S_4(\vec{a})$ در $S_\delta(\vec{b})$ قرار داشته باشد.

۳۹. $\lim_{t\to -1}\left[(t^2+1)\vec{i}+e^t\vec{j}+[(t^2-1)/(t+1)]\vec{k}\right]$ را بدست آورید.

۴۰. مقادیری از t را بیابید که $\vec{f}(t)=[(t^2+1)/(t^2-1)]\vec{i}+\tan t\,\vec{j}$ ناپیوسته باشد.

۴۱. فرض کنید $\vec{f}(t)=(t^2-1)\vec{j}+(\cos t)\vec{k}$ و $\vec{g}(t)=(\sin t)\vec{i}+e^t\vec{j}$. مطلوب است

الف) $\lim_{t\to 0}(\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t))$ ب) $\lim(\vec{f}(t)\times\vec{g}(t))$

۴۲. اگر $\vec{f}(t)$، $\vec{g}(t)$ و $\vec{h}(t)$ روی I پیوسته باشند، نشان دهید $\vec{f}(t)\times(\vec{g}(t)\times\vec{h}(t))$ روی I پیوسته است.

۴۳. فرض کنید $t>0$، $\vec{u}=(t^2+1)\vec{i}-te^t\vec{j}+(\ln t)\vec{k}$. مطلوب است

الف) $\frac{d\vec{u}}{dt}$ ب) $\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}$

۴۴. معادله خط مماس بر منحنی $\vec{r}=(t^2-2)\vec{i}+(t+3)\vec{j}+(t^2+4t+1)\vec{k}$ در $t=1$ را بدست آورید.

۴۵. فرض کنید $\vec{u}=(2+t)\vec{j}+(\ln t)\vec{k}$ و $\vec{v}=(\sin t)\vec{i}-(\cos t)\vec{j}$ برای $t>0$. مطلوب است:

الف) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ب) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})$

۴۶. فرض کنید $\vec{u}=e^t\vec{i}+2\sin t\,\vec{j}+(t^2+1)\vec{k}$ و $t\geq 2$، $t=\theta^2+2$. مطلوب است $\frac{d\vec{u}}{d\theta}$ و $\frac{d^2\vec{u}}{d\theta^2}$ (به عنوان توابعی از t)

۴۷. نشان دهید $\frac{d}{dt}\left(\vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}-\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\cdot\vec{v}$

۴۸. سه جمله اول بسط تیلور تابع $\vec{f}(t)=\cos t\,\vec{i}+(t^2+2t+1)\vec{j}$ حول $t=0$ را بدست آورید.

۴۹. با استفاده از تعریف مشتق، نشان دهید

$$\frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\vec{i}+\frac{1}{(t+1)}\vec{j}+\vec{k}\right]=2t\vec{i}-\frac{1}{(t+1)^2}\vec{j}$$

۵۰. اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ توابع مشتق‌پذیر از t باشند، نشان دهید $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}$

۵۱. تمام توابع برداری $\vec{u}$ را بیابید به طوری که

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=(3t^2+1)\vec{i}+t^3\vec{j}-(\sin t)\vec{k}$$

۵۲. تمام توابع برداری $\vec{u}$ را بیابید به طوری که

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}=\vec{a}t^2+\vec{b}t+\vec{c}$$

که در آن $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای ثابت اند.

۵۳. نشان دهید: $\vec{u}\times\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{0}$ اگر و تنها اگر $\vec{u}$ دارای جهت ثابت باشد.

۵۴. نشان دهید در $t=0$

$$(\tan^2 t)\,\vec{i}+(2t^3+t^4)\,\vec{j}=\vec{O}(t^2)$$

۵۵. فرض کنید $\vec{f}(t)$ در $t=t_0$ تحلیلی است و فرض کنید

$$\vec{f}'(t_0)=\vec{0}\,,\ \vec{f}''(t)=\vec{0}\,,\ \dots,\ \vec{f}^{(n)}(t_0)=\vec{0}\,,\ \vec{f}^{(n+1)}(t_0)\neq\vec{0}$$

نشان دهید $\vec{f}^{(n+1)}(t_0)$ نمایش دهندهٔ یک بردار مماس به منحنی $\vec{r}=\vec{f}(t)$ در $\vec{f}(t_0)$ است.

۵۶. اگر

$$\vec{f}(t)=\begin{cases} e^{-\left(\frac{1}{t}\right)^2}\vec{i} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

مطلوب است $\vec{f}^{(n)}(0)$ برای هر $n\in\mathbb{N}$.

۵۷. نشان دهید بردارهای $\vec{r}=(t^2+1)\vec{i}+(t+1)\vec{j}-t\vec{k}$ برای $t\in S_{\frac{1}{100}}(2)$ در همسایگی $S_{\frac{1}{10}}(5\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})$ قرار دارند.

۵۸. اگر $\lim_{t\to t_0}[f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}]=L_1\vec{i}+L_2\vec{j}+L_3\vec{k}$ باشد. نشان دهید

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t)=L_i\qquad i=1,2,3$$

۵۹. اگر $\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{L}$ ، $\lim_{t\to t_0}\vec{g}(t)=\vec{M}$ ، نشان دهید $\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)=\vec{L}\cdot\vec{M}$

۶۰. نشان دهید $[\vec{a}t^2+\vec{o}(t^2)]\cdot[\vec{b}t+\vec{o}(t^2)]=\vec{a}\cdot\vec{b}\,t^3+\vec{o}(t^4)$ که در آن $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ بردارهای ثابت اند.

۶۱. نشان دهید $g(t)=O(g(t))$.

۹۲. نشان دهید $\vec{O}(g_1(t))\vec{O}(g_2(t))=\vec{O}(g_1(t)g_2(t))$ ،

۹۳. نشان دهید $\vec{O}(g_1(t))\times\vec{O}(g_2(t))=\vec{O}(g_1(t)g_2(t))$

۹۴. اگر $\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{F}(t_0)$ و $\lim_{\theta\to\theta_0}h(\theta)=t_0$ ، نشان دهید $\lim_{\theta\to\theta_0}\vec{F}(h(\theta))=\vec{F}(t_0)$

۹۵. قانون زنجیره‌ای را ثابت کنید: اگر $\vec{u}=\vec{F}(t)$ ، $t=h(\theta)$ توابع مشتق‌پذیر از t و θ به ترتیب باشند آنگاه

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta}=\frac{d\vec{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}$$

۹۶. نشان دهید خم

$$\vec{r}=t\vec{i}+(t^2+2)\vec{j}+(t^2+1)\vec{k}$$

برای هر t مسطح است و تصویرهای آن بر صفحات xz و xy را رسم کنید.

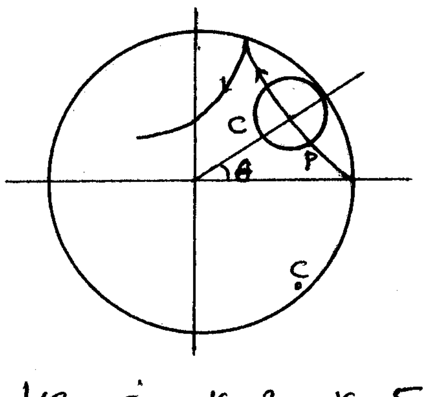
۹۷. منحنی

$$r=\frac{a}{\cos\theta}+c\ ,\quad a\neq 0,\ c\neq 0,\ -\pi\le\theta\le\pi \qquad \text{(Conchoid of Nicomedes)}$$

را در مختصات قطبی در نظر بگیرید. نمودار آن را رسم کرده و نمایش این منحنی در مختصات دکارتی را بیابید.

۹۸. نمایش فصل مشترک استوانه‌های $z^2=x$ ، $y^2=1-x$ را بدست آورید.

۹۹. یک hypocycloid منحنی مسطح تولید شده توسط نقطه P روی محیط دایره C است وقتی که C روی محیط درونی یک دایره ثابت C_0 حرکت می‌کند. اگر C دارای شعاع r و C_0 دایره‌ای با مرکز مبداء و شعاع r_0 باشد و نقطه شروع نمایش P در $(r_0,0)$ باشد، نمایش پارامتری hypocycloid را بدست آورید.



۱۰۰. اگر در تمرین ۹۹ ، $r_0=5$ و $r=2$ باشد، معادله hypocycloid را بدست آورید. و نقاط منفرد منحنی را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.

۶۲. نشان دهید $\vec{o}(g_1(t))\vec{O}(g_2(t))=\vec{O}(g_1(t)g_2(t))$ ،

۶۳. نشان دهید $\vec{O}(g_1(t))\times\vec{O}(g_2(t))=\vec{O}(g_1(t)g_2(t))$

۶۴. اگر $\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{F}(t_0)$ و $\lim_{\theta\to\theta_0}h(\theta)=t_0$ ، نشان دهید $\lim_{\theta\to\theta_0}\vec{F}(h(\theta))=\vec{F}(t_0)$

۶۵. قانون زنجیره‌ای را ثابت کنید: اگر $\vec{u}=\vec{F}(t)$ ، $t=h(\theta)$ توابع مشتق‌پذیر از t و θ به ترتیب باشند آنگاه

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta}=\frac{d\vec{u}}{dt}\frac{dt}{d\theta}$$

۶۶. نشان دهید نمایش

$$\vec{r}=t\vec{i}+(t^2+2)\vec{j}+(t^2+1)\vec{k}$$

برای هر t منتظم است و تصویرهای آن بر صفحات xz و xy را رسم کنید.

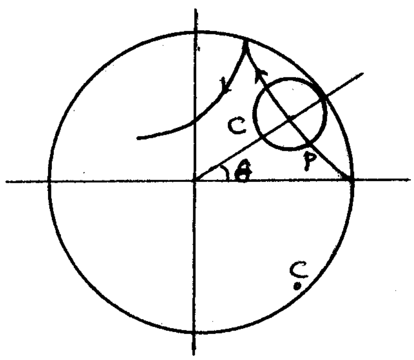
۶۷. منحنی

$$r=\frac{a}{\cos\theta}+c\ ,\quad a\neq 0\ ,\ c\neq 0\ ,\ -\pi\leq\theta\leq\pi \qquad \text{(Conchoid of Nicomedes)}$$

را در مختصات قطبی در نظر بگیرید. نمودار آن را رسم کرده و نمایش این منحنی در مختصات دکارتی را بیابید.

۶۸. نمایش فصل مشترک استوانه‌های $z^2=x$ ، $y^2=1-x$ را بدست آورید.

۶۹. یک hypocycloid منحنی مسطح تولید شده توسط نقطه P روی محیط دایره C است وقتی که C روی محیط درونی یک دایره ثابت C_0 حرکت می‌کند. اگر C دارای شعاع r و C_0 دایره‌ای با مرکز مبدا و شعاع r_0 باشد و نقطه شروع نمایش P در $(r_0,0)$ باشد، نمایش پارامتری hypocycloid را بدست آورید.



۷۰. اگر در تمرین ۶۹ ، $r_0=5$ و $r=2$ باشد، معادله hypocycloid را بدست آورید. و نقاط منفرد منحنی را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.

۷۱. نشان دهید $\theta = 3t^5+10t^3+15t+1$ برای هر t یک تغییر پارامتر مجاز است.

۷۲. یک تغییر پارامتر مجاز که فاصله $0<t\le 2$ را بروی $-\infty<\theta\le 0$ بنگارد به دست آورید.

۷۳. طول قوس منحنی به معادله $\vec{r}=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\sin t\,\vec{j}+e^t\,\vec{k}$ برای $0\le t\le\pi$ را به دست آورید.

۷۴. در مسئله ۶۹، طول قوس را به عنوان تابعی از θ در امتداد منحنی به دست آورید.

۷۵. نشان دهید $\vec{r}=t\,\vec{i}+(\sin t)\,\vec{j}+e^t\,\vec{k}$ برای $-\infty<t<\infty$ و $\vec{r}=(\ln t)\,\vec{i}+\sin(\ln t)\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ برای $0<t<\infty$ نمایش های یک منحنی جهت دار شده، هستند.

۷۶. نشان دهید یک منحنی منظم جهت دار شده تعریف شده روی هر یک از فواصل زیر دارای یک نمایش است.

الف) $0\le t\le 1$ ب) $0<t<1$ ج) $0\le t<1$ د) $0<t\le 1$.

۷۷. دو نمایش منظم $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی I_t و $\vec{r}=\vec{r}^*(\theta)$ روی I_θ معادل گفته می شوند هرگاه هر دو یک منحنی جهت دار شده را نمایش دهند، یعنی اگر تغییر پارامتر مجاز $t=t(\theta)$ وجود داشته باشد به طوری که $\frac{dt}{d\theta}>0$ و $t(I_\theta)=I_t$ و $\vec{r}(t(\theta))=\vec{r}^*(\theta)$. نشان دهید این رابطه، یک رابطه هم ارزی روی مجموعه نمایش های منظم است.

۷۸. نشان دهید یک قطعه قوس $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی I^* از یک قوس اصلاح پذیر $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی I، اصلاح پذیر است.

۷۹. فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی $a\le t\le b$ اصلاح پذیر با طول s است و $a<t_0<b$. نشان دهید قوس های قطعه ای $\vec{r}=\vec{r}(t)$ روی $a\le t\le t_0$ و $t_0\le t\le b$ هر دو اصلاح پذیر با طول های s_1 و s_2 به ترتیب اند و $s=s_1+s_2$.

۸۰. فرض کنید $\vec{r}=\vec{r}(s)$ یک نمایش طبیعی برای منحنی جهت دار شده C است و $\vec{r}=\vec{r}^*(t)$ نمایش دیگری برای C باشد. ثابت کنید

$$\frac{ds}{dt}=\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|$$

۸۱. فصل مشترک صفحه xy با صفحه قائم بر منحنی $\vec{r}=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$ را در نقطه $t=\frac{\pi}{2}$ به دست آورید.

۸۲. فصل مشترک صفحه xy با خط مماس بر منحنی $\vec{r}=(1+t)\vec{i}-t^2\vec{j}+(1+t^3)\vec{k}$ را در نقطه $t=1$ به دست آورید.

۸۳. نشان دهید یک منحنی یک خط مستقیم است، هرگاه تمام خطوط مماس آن موازی باشند.

۸۴. فرض کنید $\Delta\theta$ زاویه بین بردارهای یکه مماس $t(s+\Delta s)$ و $t(s)$ است و $\Delta s>0$. نشان دهید $\lim_{\Delta s\to 0}\Delta\theta=0$.

۸۵. نشان دهید در امتداد منحنی مسطح $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$، انحنا برابر است با:

$$|k|=\frac{|x'y''-y'x''|}{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}}$$

۸۶. نشان دهید یک منحنی یک خط مستقیم است هرگاه $\vec{r}'$ و $\vec{r}''$ برای هر t وابسته خطی باشند.

۸۷. انحنای منحنی $\vec{r}=(t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\vec{j}+t\vec{k}$ را در امتداد منحنی به دست آورید.

۸۸. نشان دهید $k\tau=\|\dot{\vec{t}}\cdot\dot{\vec{b}}\|$

۸۹. نشان دهید منحنی $\vec{r}=t\vec{i}+\frac{1+t}{t}\vec{j}+\frac{1-t^2}{t}\vec{k}$ در یک صفحه قرار دارد.

۹۰. کلی‌ترین تابع $f(t)$ را بیابید به طوری که منحنی $\vec{r}=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+f(t)\vec{k}$ یک منحنی مسطح باشد.

۹۱. نشان دهید $\vec{r}=\vec{r}(t)$ یک منحنی مسطح است اگر و تنها اگر $[\vec{r}'\ \vec{r}''\ \vec{r}''']=0$.

۹۲. ثابت کنید: اگر $\vec{r}=\vec{r}(s)$ یک منحنی مسطح باشد، آنگاه $\tau\equiv 0$.

۹۳. نشان دهید یک منحنی $\vec{r}=\vec{r}(t)$ مارپیچ در حالت کلی است اگر و تنها اگر شاخص مماس آن یک دایره باشد.

۹۴. نشان دهید مماس بر شاخص مماس یک منحنی C موازی با مماس بر شاخص قائم دوم در نقاط متناظر است.

K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

۹۵. نشان دهید انحنا در امتداد نشانگر قائم دوم برابر $k_3 = \frac{k^2+\tau^2}{k^2}$ است.

۹۶. نشان دهید تاب در امتداد نشانگر مماس برابر $\tau_1 = \frac{\tau\dot{k} - k\dot{\tau}}{k(k^2+\tau^2)}$ است.

۹۷. بردار انحنا و مقدار انحنا روی منحنی

$$\vec{r} = t\,\vec{i} + \frac{1}{2}t^2\vec{j} + \frac{1}{3}t^3\vec{k}$$

را در نقطه $t=1$ بدست آورید.

۹۸. بردار یکه قائم اصلی و بردار یکه قائم دوم به منحنی

$$\vec{r} = (3t-t^3)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + (3t+t^3)\vec{k}$$

را بدست آورید.

۹۹. انحنا و تاب را در امتداد منحنی

$$\vec{r} = (3t-t^3)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + (3t+t^3)\vec{k}$$

بدست آورید.

۱۰۰. نشان دهید در امتداد یک منحنی $\vec{r} = \vec{r}(s)$،

$$\dddot{\vec{r}} = -k^2\vec{t} + \dot{k}\vec{n} + \tau k\vec{b}$$

که در آن k انحنا، τ تاب، $\vec{t}$ بردار یکه مماس، $\vec{n}$ بردار یکه قائم اصلی، $\vec{b}$ بردار یکه قائم دوم و "." مشتق نسبت به پارامتر طول قوس است.

۱۰۱. نشان دهید در امتداد منحنی $\vec{r} = \vec{r}(s)$ داریم

$$[\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}}] = k^2\tau$$

۱۰۲. نشان دهید در امتداد یک منحنی منتظم $\vec{r} = \vec{r}(s)$ از کلاس ≥ 4 داریم

$$[\ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}}\ \vec{r}^{(4)}] = k^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right)$$

۱۰۳. ثابت کنید: اگر $\vec{r}(s_0)$ یک نقطه عطف روی منحنی تحلیلی $\vec{r} = \vec{r}(s)$ باشد که یک خط مستقیم نیست، آن گاه بردار یکه قائم اصلی پیوسته $\vec{n}(s)$ به منحنی در یک همسایگی s_0 وجود دارد.

مهلت تحویل ۱۳۹۱/۱/۱۵