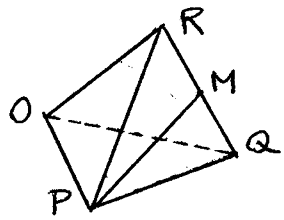
K.N.T. University of Technology
Department of Mathematics
Calculus II

تمرینات فصل اول

۱. در چهار وجهی OPQR در شکل زیر، فرض کنید $\vec{a}=\vec{OP}$ ، $\vec{b}=\vec{OQ}$ ، $\vec{c}=\vec{OR}$ و M نقطه میانی ضلع RQ است. $\vec{PM}$ را برحسب $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به دست آورید.



۲. فرض کنید $\vec{a}=2\vec{u}_1+\vec{u}_2-3\vec{u}_3$ ، $\vec{b}=\vec{u}_1-2\vec{u}_2+\vec{u}_3$ و $\vec{c}=-\vec{u}_1+2\vec{u}_2-\vec{u}_3$. بردار $3\vec{a}-2\vec{b}+c$ را برحسب $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$ و $\vec{u}_3$ به دست آورید.

۳. نشان دهید $\|\vec{a}\pm\vec{b}\pm\vec{c}\|\leq\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|+\|\vec{c}\|$.

۴. نشان دهید نقاط میانی خطوط واصل بین نقاط میانی اضلاع متقابل در یک چهاروجهی برهم منطبق اند.

۵. نشان دهید نیمسازهای یک مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۶. نشان دهید میانه‌های یک مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۷. ثابت کنید یک زیرمجموعه از یک مجموعه مستقل خطی، مستقل خطی است.

۸. ثابت کنید دو بردار مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

۹. ثابت کنید سه بردار یا بیشتر در $\mathbb{R}^2$ وابسته خطی اند.

۱۰. اگر a_i ، b_i ، c_i مولفه‌های $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ نسبت به یک پایه است. ثابت کنید

الف) $\vec{a}=\vec{b}$ اگر و تنها اگر $a_i=b_i$.

ب) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ اگر و تنها اگر $c_i=a_i+b_i$

ج) $\vec{b}=k\vec{a}$ اگر و تنها اگر $b_i=ka_i$.

۱۱. فرض کنید $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ یک پایه است، آیا $\vec{a}=\vec{u}_1-2\vec{u}_2+\vec{u}_3$ ، $\vec{b}=\vec{u}_2-\vec{u}_3$ و $\vec{c}=2\vec{u}_1-\vec{u}_2+5\vec{u}_3$ مستقل خطی اند.

۱۲. فرض کنید $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ یک پایه است و $\vec{v}_1=-\vec{u}_1+\vec{u}_2-\vec{u}_3$ ، $\vec{v}_2=\vec{u}_1+2\vec{u}_2-\vec{u}_3$ و $\vec{v}_3=2\vec{u}_1+\vec{u}_2$

نشان دهید $\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3$ یک پایه است و مولفه‌های $\vec a = 2\vec u_1 - \vec u_3$ را برحسب $\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3$ به دست آورید.

۱۳. فرض کنید $\vec a = -\vec e_1 + \vec e_2 - 2\vec e_3$ و $\vec b = \vec e_1 - \vec e_2 + \vec e_3$. مطلوب است.

الف) $\vec a \cdot \vec b$ ب) $\|\vec a\|$ ج) $\cos\measuredangle(\vec a, \vec b)$ د) $P_{\vec b}(\vec a)$ ه) $\vec P_{\vec b}(\vec a)$.

۱۴. کسینوس‌های هادی بردار $\vec a = 2\vec i + \vec j - 3\vec k$ را به دست آورید.

۱۵. x را چنان بیابید که $\vec a = x\vec i + \vec j - \vec k$ و $\vec b = 2\vec i - x\vec j + \vec k$ متعامد باشند.

۱۶. $\alpha\gamma\|\vec a\|^2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)(\vec a \cdot \vec b) + \beta\delta\|\vec b\|^2$ را تجزیه کنید.

۱۷. فرض کنید $\vec a = \vec i + \vec j - \vec k$ و $\vec b = -\vec i + 2\vec j - 2\vec k$. بردار $\vec c$ را بیابید به طوری که $\vec a, \vec b, \vec c$ اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشند.

۱۸. نشان دهید $\vec g_1 = \frac{1}{3}(2\vec i - 2\vec j + \vec k)$ ، $\vec g_2 = (\frac{1}{3})(\vec i + 2\vec j + 2\vec k)$ و $\vec g_3 = \frac{1}{3}(2\vec i + \vec j - 2\vec k)$ یک پایه متعامد یکه است. $(\vec i, \vec j, \vec k)$ را برحسب $(\vec g_1, \vec g_2, \vec g_3)$ به دست آورید.

۱۹. نشان دهید مجموع مربعات تمام اضلاع یک متوازی الاضلاع برابر با مجموع مربعات قطرهای آن است.

۲۰. اگر $\vec a = \vec i - 2\vec j + 3\vec k$ ، $\vec b = 2\vec i - \vec j - \vec k$ و $\vec c = \vec j + \vec k$ ، مطلوب است

الف) $\vec a \times \vec b$ ب) $\vec b \times \vec a$ ج) $[\vec a \vec b \vec c]$ د) $\vec a \times (\vec b \times \vec c)$

۲۱. برداری متعامد بر $\vec a = \vec i + \vec j - \vec k$ و $\vec b = -\vec i - 2\vec j + \vec k$ را به دست آورید.

۲۲. فاصله d از نقطه P تا صفحه S را به دست آورید که در آن $\vec a = \vec{OP} = \vec i + \vec j - \vec k$ برای از نقطه O روی S تا P است و $\vec b = -\vec i + \vec k$ و $\vec c = \vec i - \vec j$ در امتداد S اند.

۲۳. ثابت کنید

$$[\vec u_1\, \vec u_2\, \vec u_3][\vec v_1\, \vec v_2\, \vec v_3] = \det\begin{bmatrix} \vec u_1\cdot\vec v_1 & \vec u_1\cdot\vec v_2 & \vec u_1\cdot\vec v_3 \\ \vec u_2\cdot\vec v_1 & \vec u_2\cdot\vec v_2 & \vec u_2\cdot\vec v_3 \\ \vec u_3\cdot\vec v_1 & \vec u_3\cdot\vec v_3 & \vec u_3\cdot\vec v_3 \end{bmatrix}$$

۲۴. ثابت کنید $0 = (\vec a \times \vec b)\cdot(\vec c \times \vec d) + (\vec b \times \vec c)\cdot(\vec a \times \vec d) + (\vec c \times \vec a)\cdot(\vec b \times \vec d)$

۲۵. ثابت کنید $[(\vec a \times \vec b)(\vec c \times \vec d)(\vec e \times \vec f)] = [\vec a \vec b \vec d][\vec c \vec e \vec f] - [\vec a \vec b \vec c][\vec d \vec e \vec f]$

۲۶. ثابت کنید اگر $\vec a$ و $\vec b$ در یک صفحه قائم بر صفحه شامل $\vec c$ و $\vec d$ باشند آنگاه $(\vec a \times \vec b)\cdot(\vec c \times \vec d) = 0$

۲۷. فرض کنید $(\vec u_1,\vec u_2,\vec u_3)$ یک پایه دلخواه است و $\vec v_1=\frac{\vec u_2\times\vec u_3}{[\vec u_1\vec u_2\vec u_3]}$ ، $\vec v_2=\frac{\vec u_3\times\vec u_1}{[\vec u_1\vec u_2\vec u_3]}$ ، $\vec v_3=\frac{\vec u_1\times\vec u_2}{[\vec u_1\vec u_2\vec u_3]}$
نشان دهید $(\vec v_1,\vec v_2,\vec v_3)$ دوگان $(\vec u_1,\vec u_2,\vec u_3)$ است، یعنی

$$\vec u_i\cdot\vec v_j=\delta_{ij} \qquad i,j=1,2,3$$

۲۸. فرض کنید $(\vec u_1,\vec u_2,\vec u_3)$ و $(\vec v_1,\vec v_2,\vec v_3)$ پایه‌های دوگان باشند. نشان دهید $(\vec v_1,\vec v_2,\vec v_3)$ و $(\vec u_1,\vec u_2,\vec u_3)$ هم‌جهت‌اند.

۲۹. نشان دهید دو کلاس هم‌ارزی از پایه‌های جهت‌دار وجود دارد. یعنی، نشان دهید اگر $(\vec v_1,\vec v_2,\vec v_3)$ و $(\vec w_1,\vec w_2,\vec w_3)$ با $(\vec u_1,\vec u_2,\vec u_3)$ هم‌جهت نباشند آنگاه $(\vec v_1,\vec v_2,\vec v_3)$ و $(\vec w_1,\vec w_2,\vec w_3)$ هم‌جهت‌اند. بنابراین دو پایه مرتب یا هم‌جهت‌اند یا مختلف‌الجهت‌اند.

تمرینات فصل دوم

۳۰. معادله صفحه گذرنده از $A(1,0,-1)$ ، $B(0,0,1)$ و $C(-1,-1,0)$ را به دست آورید.

۳۱. معادله صفحه گذرنده از $A(1,-1,0)$ و عمود بر خط $x=-\lambda+1$ ، $y=\lambda+1$ ، $z=3$ را به دست آورید.

۳۲. معادلات خط فصل مشترک صفحات $3x-2y+z=5$ و $2x+3y-z=-1$ را به دست آورید.

۳۳. ثابت کنید معادله خط گذرنده از $\vec a$ و عمود بر صفحه $\vec r\cdot\vec n=d$ ، $\|\vec n\|\neq 0$ به صورت $\vec r=\lambda\vec n+\vec a$ برای $-\infty<\lambda<\infty$ است.

۳۴. ثابت کنید معادله خط گذرنده از $\vec a$ و عمود بر $\vec c$ و $\vec d$ با فرض $\vec c\times\vec d\neq\vec 0$ به صورت $\vec r=\lambda(\vec c\times\vec d)+\vec a$ است.

۳۵. معادله مخروط با رأس $A(0,1,1)$ با محور مولد موازی با محور xها و زاویه $\theta=60^\circ$ را به دست آورید.

۳۶. مسیرهای $\vec r=(t^3+1)\vec i+(1-t^2)\vec j$ برای tهای صحیح در $-4\le t\le 4$ را با مقیاس بزرگ رسم کنید.